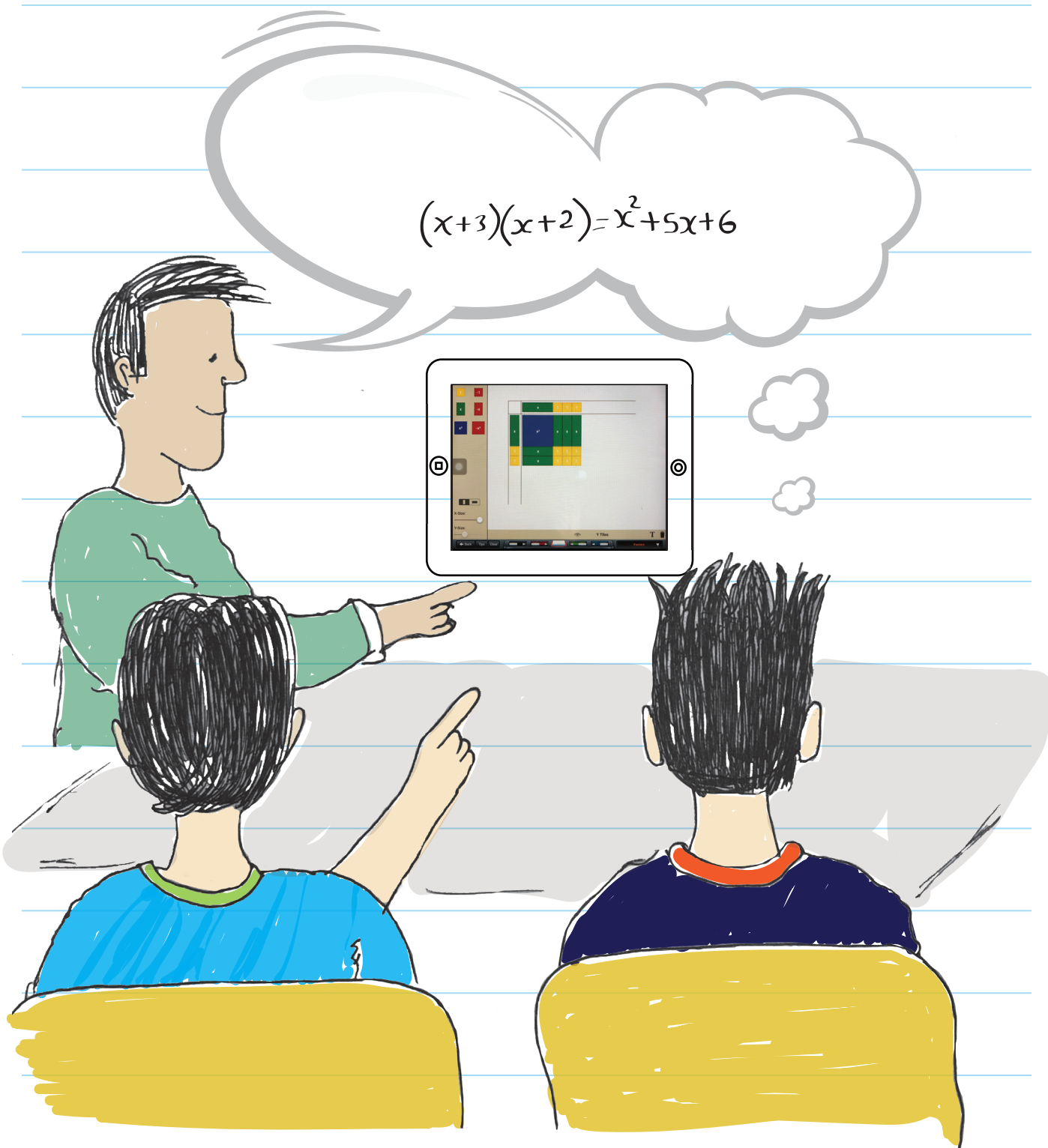


Interacciones para **construir el pensamiento** *variacional*

$$(x+3)(x+2) = x^2 + 5x + 6$$



Análisis de las interacciones del sistema didáctico saber-estudiante-docente, durante la implementación de una secuencia didáctica para la enseñanza de la multiplicación de polinomios en estudiantes de octavo grado.

Martha Lucía Acosta, Fernando Casas Cortés
Profesor de Matemáticas, Gimnasio Campestre.
Correspondencia para los autores: fcasas@campestre.edu.co

Recibido: 15 de agosto de 2019
Aprobado: 25 de septiembre de 2019

RESUMEN

Durante esta investigación en la línea de la didáctica de las disciplinas, se observó y se analizó la implementación de la secuencia didáctica “multiplicación de polinomios” en un grupo de estudiantes de octavo grado. De acuerdo con la línea de investigación, se aplicó la metodología de la clínica didáctica, que permitió, a partir de la observación entre pares y la recolección de información, caracterizar y analizar las interacciones del sistema didáctico, estudiante-medio-docente durante la implementación de la secuencia. Mediante el análisis y la reflexión efectuados, se logró por una parte, determinar la importancia del momento de planeación de la secuencia didáctica, y por otra, constatar el impacto que tienen las interacciones estudiante-medio-docente en los momentos de devolución y regulación, en el avance de la construcción de los conceptos matemáticos.

Palabras clave: Clínica didáctica, medio, definición, devolución, regulación, institucionalización, mesogénesis, topogénesis, cronogénesis.

SUMMARY

During this investigation in the field of didactics of disciplines, the researchers observed and analyzed how the didactic sequence “Multiplication of Polynomials” was implemented in Eighth grade students. In accordance with the research field, the researchers applied the didactic clinic methodology, which allowed, using peer observation and the collection of information to characterize and analyze the interactions of the student-knowledge-teacher didactic system as the sequence was being implemented. The analysis and the reflection undertaken allowed, on the one hand, to determine the importance of the moment of the didactic sequence planning and, on the other, to verify the impact that the student-teacher-media interactions have on the moments of devolution and regulation, in the progress towards the construction of mathematical concepts.

Key words: Didactic clinic, definition, devolution, regulation, institutionalization, topogenesis, mesogenesis, chronogenesis.

INTRODUCCIÓN

Resultados de investigaciones en el campo de la didáctica de la matemática han mostrado evidencias de las dificultades que enfrentan los estudiantes en el paso del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico. Castro (1994) plantea que las dificultades de los estudiantes pueden asociarse a tres causas: epistemológica, ontológica y didáctica. La primera, está relacionada con la naturaleza misma del álgebra, su lenguaje, los elementos que lo conforman y las reglas que lo rigen. La segunda causa es inherente al sujeto y se relaciona con la complejidad de los procesos de abstracción y generalización. Finalmente, la causa de origen didáctico, está asociada a la enseñanza tradicional del álgebra centrada en la manipulación de símbolos, desprovista de sentido para el estudiante. Específicamente en la línea del álgebra, García y Lupiañez (2011), Ortigoza y Dueñas (2013), Robayna y Medina (1994) entre otros, han mostrado que la estrategia tradicional de enseñanza de la multiplicación de polinomios mediante la memorización de reglas, se constituye en un obstáculo didáctico para que los estudiantes puedan comprender este concepto.

Para atender las causas de origen didáctico, nuevas tendencias en la investigación en educación matemática han identificado la pertinencia de proveer elementos de análisis para el docente sobre su quehacer en el aula y se han enfocado en la producción de una teoría de la acción didáctica, fundamentada en conceptos descriptivos y sistemáticos para la comprensión y caracterización de la práctica docente, mediante la metodología de clínica didáctica (Sensevy, 2007, Rickenmann, 1999).

Consciente de la necesidad de apoyar al maestro en su rol de maestro-investigador “...que se preocupa por comprender mejor su práctica y se propone interpretar racio-

nalmente la propia experiencia” (Rico 1990, p. 7), el Gimnasio Campestre ha asumido la teoría de la didáctica de las disciplinas y su metodología de la clínica didáctica como una de sus líneas de investigación, para permitir al docente realizar un ejercicio sistemático de observación entre pares, basado en la observación, comprensión, caracterización, reflexión y auto-confrontación de su práctica, en la búsqueda de un mejoramiento constante del quehacer docente en el aula.

En este sentido, el desarrollo del presente estudio en la línea de investigación en didáctica de las disciplinas y los elementos conceptuales y metodológicos que la sustentan busca en primer lugar, caracterizar las interacciones del sistema didáctico saber-alumno-docente durante la implementación de la secuencia didáctica *multiplicación de polinomios*, a partir de las categorías para describir y comprender la acción didáctica (Sensevy, 2007); en segundo lugar, busca mostrar evidencias acerca de la relación entre las intenciones didácticas de la secuencia implementada por el docente y los conceptos construidos por los estudiantes y, finalmente, reflexionar acerca del quehacer didáctico del docente.

METODOLOGÍA

La metodología de clínica didáctica se desarrolla en cuatro fases: la fase de planeación que se centra en la planificación de la unidad didáctica y la entrevista inicial; la fase de gestión en la que se implementa la situación didáctica y se registra la información; la fase de análisis que consiste en la transcripción en forma de protocolo escrito, el análisis de los fenómenos observados a partir de las categorías propias de la metodología de la Clínica didáctica y la descripción de los fenómenos observados en la fase de gestión; finalmente, la fase de confrontación que incluye la reflexión sobre la práctica docente y la entrevista final (Rickenmann, 1999).

Fase de planeación

Planeación de la secuencia didáctica

En esta fase de investigación, se inició la planeación de la secuencia didáctica con la participación de los dos docentes investigadores. Para ello, se tomaron elementos del modelo pedagógico, el plan de estudios, de la teoría de las Situaciones didácticas y, se tuvieron en cuenta los resultados de la prueba de diagnóstico aplicada a los estudiantes. Como se explicita en el modelo pedagógico (2013), el Gimnasio Campestre busca que los estudiantes desarrollen competencias que les permitan construir conocimiento de manera eficaz y autónoma a través de “metodologías didácticas fundamentadas en estrategias de indagación e investigación” (p.9, 2013). Así mismo, el Colegio define los principios básicos de la didáctica como “aquellos aspectos innegociables sobre los cuales cada una de las diferentes áreas y los diferentes grados generan sus estrategias pedagógicas: diferentes caminos para razonar, caminos comunes y diferentes de aprendizaje y novedad y aprendizaje” (p. 28, 2013).

De acuerdo con los planteamientos anteriores del Modelo pedagógico, el diseño de la secuencia didáctica se basó en los cinco principios didácticos:

(i) Transversalidad y perspectiva compleja, mediante las relaciones que se establecieron al interior de las matemáticas, entre dos tipos de pensamiento matemático, el pensamiento geométrico y el pensamiento variacional.

(ii) La investigación como estrategia pedagógica a través de las etapas del ciclo de Indagación IBLM (*Inquiry Based Learning in Maths*) sugerido por el par investigador.

(iii) Tecnología: uso de la aplicación *Algebra Tiles* para iPads.

(iv) Tipos de razonamiento: inductivo, deductivo, hipotético-deductivo y analógico,

que se aplicaron en cada etapa del ciclo de indagación.

(v) Ciclo de evaluación formativa, identificada en la guía de trabajo propuesta y en las sesiones de comunicación de resultados en el proceso de indagación.

La figura 1 muestra el ciclo de Indagación y las conexiones entre los principios didácticos que fundamentan la propuesta didáctica.

En relación con el plan de estudios, la secuencia didáctica atendió al objetivo general del grado en el que se busca “*To establish relationships among variables using linear and quadratic models focusing on functional concepts*”¹ y al Tópico de indagación para el segundo trimestre, *Quadratics and Algebra*. Además, se aborda el primer contenido correspondiente al segundo trimestre, *Multiplication and Division of Polynomials*, contenido que se desarrolla teniendo en cuenta su definición en el Modelo pedagógico, “...procedimientos, métodos, técnicas, temáticas y conceptos propios de una disciplina ...” (p.21, 2013), en este caso la multiplicación de polinomios, y se asume como un vehículo a través del cual se desarrollan las cuatro competencias asociadas al pensamiento complejo: gestión de la información, valoración crítica, creatividad y metacognición. De acuerdo con la matriz de evaluación del segundo trimestre para octavo grado, la secuencia se centró en el desarrollo de la competencia gestión de la información en la que el estudiante: *Identifies multiplication and division of polynomials to select the suitable process of factoring.*²

Para diseñar las transacciones didácticas propias del juego de saber, la teoría de las

1. Establecer relaciones entre variables usando modelos lineales y cuadráticos centrados en conceptos funcionales.

2. En español: identifica la multiplicación y división de polinomios para seleccionar un proceso adecuado de factorización.

situaciones didácticas (Brousseau, 2007) y la clínica didáctica (Sensevy, 2007) proponen dos elementos teóricos fundamentales: la acción conjunta y el medio. Por una parte, la *acción* conjunta que se basa en la relación didáctica entre el saber, el profesor y los estudiantes, que se da en un proceso de comunicación en un entorno determinado, basado en el diálogo entre los agentes de la acción didáctica (profesor-estudiante) y que se traduce en interacciones y transacciones de los objetos de comunicación, es decir, los saberes (Sensevy, 2007). Este aspecto sugirió para el diseño de la secuencia didáctica, atender de manera simultánea y coherente, a los tres elementos considerados en la acción conjunta: el profesor, el saber y el estudiante; es decir, incluir en la planeación sus posibles acciones y alcances. Por otra parte, los mismos autores integran y definen otro concepto fundamental en su teoría: el medio, como contexto cognitivo de la acción didáctica y como sistema antagonista.

Finalmente, de acuerdo con los resultados de la prueba diagnóstico, se evidenció que, aunque los estudiantes habían tenido un acercamiento al concepto el año anterior desde una propuesta procedimental, sólo

el 26 % de los estudiantes habían apropiado el procedimiento para multiplicar polinomios.

A partir de los elementos anteriormente considerados, el docente elaboró como *medio*, una guía de trabajo en la que incluyó elementos del Modelo pedagógico, del plan de estudios y los dos sentidos de la definición de *medio* desde la teoría de las situaciones didácticas. El objetivo de la guía propuesta por el docente, era que el estudiante generalizara el procedimiento algebraico para multiplicar polinomios, a partir de la aplicación de conocimientos previos relacionados con la conexión entre la multiplicación y el área de los rectángulos. Para ello, el docente aprovechó la analogía entre la representación de arreglos rectangulares con manipulativos (*Algebra Tiles*) y la operación de polinomios correspondiente. El trabajo del profesor se centró en la producción de un juego de saber en el que buscó que un conocimiento específico, en este caso el procedimiento para multiplicar polinomios, emergiera desde la coherencia entre la representación geométrica y su expresión algebraica en el contexto de los manipulativos, de tal manera que el aprendizaje se pudiera evidenciar en la producción e interiorización de la estrategia ganadora por parte de los estudiantes. Es decir, se trató de una estrategia general para multiplicar polinomios, que funcionara en todos los casos. Se observó que como la guía se basó en “...la insuficiencia del contexto cognitivo actual, así como en su necesidad” (Sensevy, 2007, p. 11), los estudiantes tenían la oportunidad de comparar una representación geométrica con una expresión algebraica. No obstante, debían encontrar el método algebraico para obtener esa expresión, identificando posibles errores en la comprensión del concepto e integrando de esta manera el sentido de *medio* como sistema antagonista.

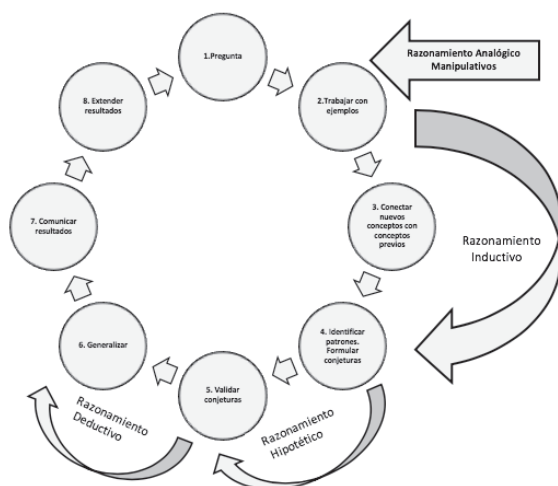


Figura 1. Imagen adaptada por Martha Lucía Acosta de *Implementing Inquiry in Mathematics Education* (2012).

La guía de trabajo propuesta por el docente se organizó en dos sesiones, una para cada clase con los estudiantes. La primera sesión se dividió en dos partes: la parte 1 (anexo A, Tabla 1), abordó la pregunta de indagación, ¿Cómo multiplicar monomios? La parte 2 abordó la pregunta, ¿Cómo multiplicar un monomio por un binomio?. La segunda sesión se centró en la pregunta de indagación, ¿Cómo multiplicar binomios? En cada sesión se aplicó la misma estructura de la estrategia de indagación.

En esta fase se realizó la entrevista inicial en la que el docente estableció los objetivos de la secuencia didáctica, explicitó el concepto matemático y explicó la estrategia pedagógica, aspectos que fueron ampliamente descritos anteriormente. De la misma manera, el docente caracterizó el grupo conformado por 24 estudiantes, quienes “...a nivel convivencial son un poco conversadores, algo inquietos y poco interesados para desarrollar las actividades de clase. Por otro lado, a nivel académico se dividen en aquellos que tienen facilidad, los estudiantes promedio y aquellos que tienen dificultades en el área” y de acuerdo con estas características determinó que “...esperaba capturar la atención y el interés de los estudiantes por la multiplicación de polinomios y generar autonomía en el proceso para así lograr la reconstrucción del conocimiento...”.

Adicionalmente, el docente estableció posibles dificultades para el logro de los objetivos propuestos y posibles estrategias para superarlas. En relación con las dificultades, el profesor afirmó que “...desde lo disciplinario podría pasar que los estudiantes tengan un comportamiento no adecuado para el desarrollo óptimo de la clase y desde lo académico podría ocurrir que los estudiantes con menos habilidad puedan verse, de pronto, quedados en el proceso...”. Respecto de las estrategias para superarlas, el docente

sugirió que “...si la dificultad es de tipo disciplinario, desde el comité de grado octavo ya se han diseñado algunas estrategias, que sin duda se implementarán en caso de necesitarlo y si la dificultad es de tipo académico, el taller está diseñado en parejas, de manera que los estudiantes con mayor dificultad puedan sentir apoyo con sus pares...y, el recurso tecnológico que es *Algebra Tiles*, les permite realizar de forma gráfica el mismo proceso que se hace de manera matemática”

Fase de gestión

En esta fase, se implementó la secuencia didáctica en un grupo de 23 estudiantes de Octavo grado, los días lunes 26 de noviembre de 7:20-8:40 y viernes 30 de noviembre de 1:40-3:00. El registro de información se hizo mediante la técnica de la videoscopia con una cámara fija y una cámara móvil.

Fase de análisis:

En la fase de análisis se tuvieron en cuenta las categorías propuestas por Sensevy (2007) y Rickenmann (1999) para caracterizar y describir la acción didáctica en cada una de las sesiones de la unidad. La cuádrupla, constituida por las categorías, definición, devolución, regulación e institucionalización, que son las acciones del profesor y los estudiantes a lo largo de la acción didáctica; y la tripleta fundamental, formada por mesogénesis, topogénesis y cronogénesis, que permite describir la manera en la que el profesor construye el juego con los estudiantes, a partir de la evolución del saber en el tiempo. Se realizó una revisión inicial de los videos y se identificaron los fenómenos observados durante la fase de gestión de la secuencia, fenómenos que fueron registrados en una sinopsis en forma de tabla que incluyó cinco columnas: tiempo, estrategia usada en la clase, cuádrupla de caracterización, tripleta y fenómenos didácticos; sinopsis que se constituyó en insumo para la descripción

y caracterización de cada sesión que se expone a continuación. Adicionalmente, se utilizaron aportes metodológicos de investigadores como Collados y Rickenman (2010), Rickenmann y Alfonso (2012), Saldarriaga, et al. (2012) y Merchán y Ramírez (2015) quienes han implementado la clínica didáctica en espacios de formación docente.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

SESIÓN 1(26/11/18)

Al iniciar la sesión, el profesor establece las reglas generales para realizar el trabajo, aspecto que evidencia el momento de definición en el que el profesor transmite "...reglas constitutivas, definitorias del juego" (Sensevy (2007, p. 18).

El fragmento 1 muestra cómo el profesor introduce el medio que va a proponer para que los estudiantes construyan el conocimiento sobre la multiplicación de polinomios, conformado por un taller que debían resolver, enviado previamente a través de Phidias (plataforma institucional para comunicación con estudiantes), en formato de Word para poder ser editado por los estudiantes a medida que avanzaran en su desarrollo y la aplicación *Algebra Tiles* para iPad, que usarían para apoyar el proceso de aprendizaje.

Fragmento 1

Profesor: *Today we will have a special activity with the iPads ...*

Estudiante 1: *Is the one that you sent?*

Profesor: *Yes...I sent you by Phidias a workshop, that 's the workshop we are gonna solve by this app. ...and before to start with the workshop, I 'm gonna introduce the topic in this day ok? ... so please pay attention.*

Estudiante 1: *Can we do the activity in our computer or...*

Profesor: *You have to use the iPad because in the iPad is the app and you can organize the document in your computer*

Enseguida y dentro de este momento de definición el profesor inicia un proceso de transacción didáctica con los estudiantes centrado en "...la elaboración de un sistema común de significados para el profesor y los alumnos..." (Sensevy, 2007, p.18). En este caso, la elaboración de un sistema de conocimientos previos acerca de la relación entre la multiplicación y el área de un rectángulo como fundamento conceptual para la construcción de la multiplicación de polinomios. Esta interacción inicial evidencia el fenómeno de la mesogénesis y da cuenta del nivel de conceptualización de los estudiantes antes de iniciar el taller propuesto, haciendo explícito un fenómeno cronogenético. Se observan además indicios del fenómeno topogenético, que muestra cómo el profesor no asume todo el manejo del conocimiento previo, sino que propicia la participación de los estudiantes en la precisión de los conceptos requeridos para el desarrollo de la actividad, como se ilustra en el fragmento 2.

Fragmento 2

Profesor: *Before to start I 'm going to talk to you about finding areas of squares before to start ok?...so for example (el profesor dibuja un cuadrado en el tablero) What happens if you have a square and the measure of this is 3 (señala uno de sus lados) and the measure of this is 3 (señala el otro lado). How do we find the area of a square?*

Estudiante 3: *Multiplying 3 times 3*

Profesor: *Yes...but you have to think out of the number ok? If we think in a geometrical way...*

Estudiante 4: *Length times width*

Profesor: *Thank you...this is...*

Estudiante 4: *Length times width*
Profesor: *...or base times height ok*

El profesor continúa el momento de definición, proyecta la guía en el tablero y sugiere a los estudiantes abrir el documento. Con la participación de algunos estudiantes, quienes leen cada paso, el profesor describe en forma detallada la acción que deben realizar en cada etapa de la estrategia de Indagación, tal y como se describió previamente en la Tabla 1. El fragmento 3 muestra cómo el profesor describe la acción que el estudiante debe realizar en el paso *generalizing* de la estrategia, en el que se hará evidente si los estudiantes logran responder la pregunta de indagación de la sesión 1 parte 1 y, por tanto, proveerá indicios para el momento de institucionalización y para las categorías mesogénesis y topogénesis. El fragmento 3 ilustra este momento.

Fragmento 3

Estudiante 5: *Generalizing...one...two...three.*

Profesor: *Generalizing. You have to show me the steps OK? You have to... this space is to explain step by step the multiplication of monomials.*

El profesor, cierra el momento de definición con la descripción general del manejo de la aplicación, precisa nuevamente las reglas para desarrollar la actividad y promueve la autonomía para que en parejas, los estudiantes construyan el concepto por sí mismos, aspecto que explicita un fenómeno topogenético en el que el profesor le da la responsabilidad al estudiante para que asuma su proceso de aprendizaje, como se ilustra en el fragmento 4.

Fragmento 4

Profesor: *What's the idea... you have to try to solve it by yourself. If you have a question, of course, I'm gonna*

solve it. But try to solve by yourself. I want you to work in pairs...so I'm gonna choose the pair...with the partner close to you...and let's start.

El trabajo en parejas da inicio a un momento de devolución-regulación. La devolución, generada por las preguntas de los estudiantes sobre cómo desarrollar la actividad, y en la que el profesor verifica que los estudiantes asuman la actividad de una manera “adecuada”. Es decir, que los estudiantes se centren en el desarrollo de la actividad propuesta, para encontrar “la estrategia ganadora”, el nuevo conocimiento o procedimiento que deben lograr (Sensevy, 2007). Este momento de definición también está asociado a la construcción de conocimiento. “En este cambio de roles se plantea un proceso de conocimiento a-didáctico, donde el maestro pasa a un plano más de acompañamiento, caso en el cual la responsabilidad recae sobre el alumno y le corresponde auto-gestionar su conocimiento” Castañeda (2010, p.5). En el momento de regulación y frente a la necesidad de orientar a los estudiantes, el profesor debe tener “...la intención de facilitar la adopción de estrategias ganadoras por parte de los alumnos y la comprensión de las reglas estratégicas del juego” (Sensevy, 2007, p. 19), es decir, puede orientar la producción de los estudiantes pero no puede sustituirlos en el proceso de producción de estrategias.

A partir de las preguntas de los estudiantes sobre cómo representar la figura de acuerdo con la base y la altura, el profesor decide volver a un momento de definición y hacer una explicación general de la aplicación en el iPad, como se evidencia en el fragmento 5.

Fragmento 5

Profesor: *(Proyecta nuevamente la aplicación y señala en ella). This space and this space is to write the measure*

of the base and the height and this space is to show me the area...in this space you have to show me the figure, the real figure...

Estudiante: *¿Puede hacer un ejemplo?*

Profesor: *Try to do it by your-self.*

Se escucha a los estudiantes preguntar nuevamente al profesor sobre el manejo de la aplicación, así que el profesor decide no dar un ejemplo resuelto teniendo en cuenta las condiciones de la regulación, sino preguntar a los estudiantes cómo representar con la aplicación el área de un cuadrado de lado “x” y aprovechar las respuestas correctas de los estudiantes para institucionalizar el manejo de la aplicación, dando lugar a una secuencia devolución-regulación-institucionalización conjunta que evidencia un fenómeno topogénico, puesto que se da la participación tanto del profesor como de los estudiantes. El fragmento 6 ilustra la secuencia devolución-regulación-institucionalización y muestra indicios de las categorías mesogénesis y cronogénesis al observar avances en el proceso de aprendizaje en los estudiantes.

Fragmento 6

Profesor: *“x” is the height and “x” is the base. Now you have to show me the figure. Show me the figure.*

Estudiante 4. *Like this? (Levanta el iPad mostrando un cuadrado de lado “x”).*

Profesor: *Exactly.*

Estudiante 6: *¿Este es Fercho?... (El estudiante mismo se responde) ¡Si porque “x” por “x” es “x” al cuadrado!*

Los estudiantes continuaron centrados en el desarrollo de la actividad mientras que el profesor regulaba su producción. Un efecto que puede presentarse durante la regulación, denominado el *Efecto Topaze* (Brousseau, 2007), consiste en que, para dar solución a una

pregunta de un estudiante y para no dar la estrategia o la respuesta, el profesor oculta la situación en otra que no está directamente relacionada con la situación de la pregunta, de tal manera que el estudiante resuelve la pregunta, pero se aleja del aprendizaje que se quería lograr. El fragmento 7 muestra cómo el profesor propone al estudiante buscar la figura perfecta “*the perfect figure*” o las líneas perfectas “*perfect lines*”, como estrategia para representar el rectángulo a partir de las expresiones algebraicas de su base y de su altura; en este caso el profesor no hace uso del concepto de área para representar el rectángulo a partir de su base y de su altura. Por lo tanto, el estudiante puede representar correctamente el rectángulo con la estrategia propuesta por el profesor, pero no se puede garantizar que pueda establecer la relación adecuada entre el área de un rectángulo y el procedimiento para multiplicar polinomios, concepto que se espera logre construir.

Fragmento 7

Estudiante 7: *Fercho, ¿aquí qué hago?*

Profesor: *Show me*

Estudiante 7: *Lo que yo creo es... (el estudiante usa la aplicación).*

Profesor: *Look look stop stop. This figure, is the perfect figure for each rectangle?*

Estudiante 7: *No. (El estudiante muestra una nueva acción con la aplicación).*

Profesor: *ok what would be if you change the sense...*

Estudiante 7: *(El estudiante corrige la acción con la aplicación). Fercho, ¿así es?*

Profesor: *Ok look. Can you see the lines? (El profesor señala las líneas que se forman al construir el rectángulo) ...the lines are perfect. You can see one line. That means it is the perfect figure.*

El profesor continúa el momento de regulación e integra en su retroalimentación el elemento conceptual adecuado, la multiplicación de la

base por la altura de todos los rectángulos que forman el rectángulo total, evidencia de un fenómeno mesogenético-cronogenético que favorece la construcción del concepto en los estudiantes en este momento de la clase, como se muestra en el siguiente fragmento.

Fragmento 8

Profesor: *Check the figure, perfect lines, and second, 3 times 4...*

Estudiante 8: *Entonces, ¿me toca multiplicarlo?*

Profesor: *How can we find the area of a square or a rectangle? Multiplying.*

Estudiante 8: *Si, multiplicando la base por la altura.*

El profesor continúa circulando para regular el aprendizaje. Se observa un trabajo más autónomo de los estudiantes y cómo parte de la regulación es asumida por ellos mismos, evidencia de la topogénesis. Nuevos indicios de los fenómenos mesogenéticos y topognéticos se hacen también evidentes, cuando los estudiantes logran establecer la relación entre el área del rectángulo representado con la aplicación *Algebra Tiles* y la multiplicación de monomios, como se ilustra en los fragmentos 9 y 10.

Fragmento 9

Profesor: *You have to check the process in algebraic way as well. If you have to find the area of this rectangle is three "x" times four "x", what is the answer?*

Estudiante 9: *Twelve "x" square.*

Profesor: *ok*

Fragmento 10

Estudiante 4: *In here I put the steps... and here?*

Profesor: *In this part you have to answer the question how to multiply*

monomials. In this part is identifying the step by step, in this part the conclusion.

Estudiante 4: *ok*

Profesor: *How to multiply monomials? We can multiply monomials...*

Estudiante 4: *Multiplying the variables and the coefficients.*

Profesor: *Perfect.*

Como la mayoría de los estudiantes no alcanzaron a abordar la parte 2 de la primera sesión, el profesor propone terminar la parte 2 como práctica e inicia el momento de institucionalización de conceptos de la primera sesión. En este momento, que como se pudo observar puede darse durante o al finalizar la actividad, el profesor hace un reconocimiento de los aprendizajes de los estudiantes y verifica que los saberes que demuestran los estudiantes corresponden a "las maneras de hacer y de pensar que resultan adecuadas en el juego" (Sensevy, 2007, p. 19), que para el caso, son los procedimientos que se esperaba emergieran a partir del desarrollo de la actividad. El profesor promueve una breve discusión sobre la solución de la primera pregunta de indagación: ¿Cómo se multiplican monomios? Los estudiantes explican el método algebraico para multiplicar monomios y justifican el procedimiento teniendo en cuenta las leyes de los exponentes, como se muestra en el fragmento 11.

Fragmento 11

Profesor: *How could you multiply monomials?*

Estudiante 4: *Multiplying the base and the height.*

Profesor: *Ok. In the geometric form... and in the algebraic form?*

Estudiante 1: *Can be added the exponents?*

Profesor: *In which case you have to add exponents?*

Estudiante 1: *When you are multi-*

plying same bases.

Profesor: *Ok. Another opinion. How could you multiply monomials?*

Estudiante 11: *First, you need to multiply coefficients and then multiply variables...*

Profesor: *Thank you. Perfect.*

SESIÓN 2 (30/11/18)

El profesor inicia la segunda sesión con un momento de definición (fragmento 12), en el que explicita las reglas de trabajo para la segunda sesión, a partir del comportamiento demostrado en la clase anterior y de los productos de la sesión 1 que los estudiantes enviaron a través de Phidias.

Fragmento 12

Profesor: *I'm gonna recomend you silence and please good behavior. Last class you were not very good behave. In this class I want you to give me your answers for this workshop (el profesor proyecta la actividad de la sesión 1 parte 1), and then you have to finish part 2 of this workshop and we have to start the second workshop. It is similar to the first activity but with different topic.*

El profesor propone ahora un momento de institucionalización, en el que pide a los estudiantes dar solución a cada uno de los pasos de la actividad de la sesión 1 parte 1. A través de esta discusión se analizan diferentes respuestas y se precisan los conceptos y procedimientos requeridos en cada paso del proceso para responder la primera pregunta de indagación de la unidad didáctica, ¿Cómo se multiplican monomios?

Enseguida, continúa el momento de definición relacionado con la actividad de la segunda sesión, en la que el profesor aplica la misma estrategia de indagación. Los estudiantes

demuestran apropiación de la estrategia e inician su trabajo de manera autónoma. El profesor por su parte, da retroalimentación a los estudiantes que lo solicitan, lo que evidencia un momento de devolución-regulación, que se explicita en el fragmento 13. En este fragmento se puede observar que el tipo de retroalimentación que da el profesor se sustenta en la propiedad distributiva y que el estudiante apropia la estrategia, mostrando un indicio de los fenómenos mesogenético y cronogenético mediante el avance que demuestra el estudiante en la construcción del procedimiento para multiplicar un binomio por un binomio, que corresponde a la pregunta de indagación de esta sesión de clase. La multiplicación en este caso es $(x+2)(x+1)$ y el estudiante, mediante el uso de la aplicación en el contexto geométrico y de la propiedad distributiva sugerida por la misma aplicación, evidencia el manejo de las herramientas cognitivas necesarias para transferir esta estrategia al contexto algebraico para establecer el procedimiento de multiplicación de dos binomios.

Fragmento 13

Estudiante 6: *Fercho, is this correct?*

Profesor: *Yes. You can check by yourself. "x" times "x"?*

Estudiante 6: *"x" square.*

Profesor: *"x" times...? (el profesor señala una figura de la representación en el iPad).*

Estudiante 6: *"x" times one? One "x" or "x".*

Profesor: *"It is? (el profesor señala otra figura de la representación en el iPad).*

Estudiante 6: *Yes.*

Profesor: *Ok, second line (el profesor señala otra figura de la segunda fila del arreglo rectangular en el iPad).*

Estudiante 6: *One times "x" is "x".*

One times one is one. (Continúa con la tercera fila del arreglo rectangular).

One times "x" is "x". One times one

is one. ¡Ah!

Profesor: Is it correct or it is not?

Estudiante 6: Yes. Thank you.

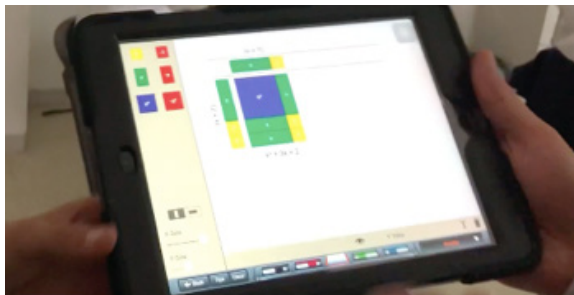


Imagen 1. Uso de la aplicación *Algebra Tiles* para representar el producto $(x+2)(x+1)$.

Al continuar con el momento de devolución-regulación, se observa un buen manejo de la aplicación y un avance en el proceso de transferencia de la acción de distribuir las figuras de cada fila por las figuras de cada columna en la aplicación *Algebra Tiles*. El proceso algebraico de la multiplicación de monomio por binomio y binomio por binomio se hace mediante la propiedad distributiva, concepto central que los estudiantes debían construir a lo largo de la actividad y que se evidencia en la distribución de cada fila por cada columna. La acción del docente a través de la regulación evidencia los fenómenos topogenético (el docente guía la construcción del concepto sólo cuando el estudiante lo solicita), mesogenético (el docente busca avances conceptuales en los estudiantes) y cronogenético (el docente moviliza el tiempo didáctico), como se muestra en el fragmento 14.

Fragmento 14

Profesor: Do you remember the generalizing step?...Check the context, check the situation, is it okay?

Estudiante 13: Yes

Profesor: Okay...now

Estudiante 13: Multiply

Profesor: Okay multiply

Estudiante 13: Like this? (el estudiante usa la aplicación para construir el arreglo rectangular).

Profesor: Stop. "x" times "x" is "x"?

Estudiante 13: No. It is "2x"

Profesor: "2x" or "x" square? (el profesor señala la figura correcta en la aplicación).

Estudiante: "x" square. Y así?...y lo mismo con el otro. "x" times "y" is "xy" (el estudiante termina correctamente el proceso de multiplicar $3x(2x + 3y)$ con la aplicación).

Profesor: You can check your geometric process by the algebraic process. "3x" times "2x"

Estudiante 13: "6x square"

Profesor: Okay "3x" times "3y"

Estudiante 13: "9xy"

Profesor: Is it correct? (el profesor señala la respuesta que muestra la aplicación y que coincide con la respuesta del estudiante).

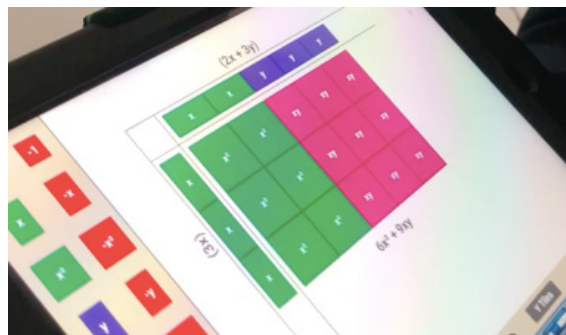


Imagen 2. Uso de la aplicación *Algebra Tiles* para representar el producto $3x(2x+3y)$.

Como la mayoría de los estudiantes no terminaron la actividad correspondiente a la multiplicación de binomios, el profesor termina la sesión 2 con un momento de institucionalización colectiva para revisar la parte 2 de la sesión 1 relacionada con la multiplicación de un monomio por un binomio y propone a los estudiantes terminar la sesión 2 en casa y enviarlo a través de Phidias. El fragmento 15 muestra los resultados de este

momento de institucionalización en la etapa *Generalizing*. El estudiante evidencia el uso de la propiedad distributiva (mesogénesis, cronogénesis) estrategia fundamental en el proceso de la multiplicación de polinomios.

Fragmento 15

Profesor: *Generalizing monomial times binomial.*

Estudiante 6: *Identify the situation... distribute the monomial...multiply the monomials.*

Profesor: *And you have to use the rules, of course.*

Fase de confrontación

A partir de la información registrada en los videos y de la entrevista final, el profesor auto-confrontó su proceso de enseñanza, teniendo en cuenta los siguientes aspectos: el objetivo de la unidad didáctica, aspectos convivenciales o académicos que podrían obstaculizar el proceso y posibles estrategias de solución, la estrategia didáctica aplicada y los momentos de regulación.

En cuanto al objetivo de la unidad didáctica, el docente afirma haber obtenido evidencia de un buen nivel de logro, a través de la aplicación de la multiplicación de polinomios en otros procesos algebraicos como la factorización. Por otra parte, el docente determinó que antes de la implementación de la unidad didáctica, los estudiantes evidenciaban dificultad en la comprensión de la propiedad distributiva, incluso durante el desarrollo de la unidad didáctica. Sin embargo, en los momentos de institucionalización evidenció un avance significativo en la comprensión de esta propiedad y su relación con la multiplicación de polinomios. En relación con los aspectos convivenciales o académicos que podrían obstaculizar el proceso, el profesor pudo identificar algunas dificultades relacionadas con la disposición para el trabajo en algunos estudiantes y diferentes niveles de conceptualización. En el

primer aspecto, aunque se tenía un acuerdo de comité para este manejo, el profesor consideró que retirar a los estudiantes no era una opción pertinente puesto que no les permitiría la interacción con la pareja de trabajo y la socialización de resultados para la institucionalización de conceptos. Sin embargo, el profesor resaltó la importancia de garantizar un ambiente adecuado de aprendizaje y por tanto, sugirió que, en situaciones posteriores, se considere las estrategias de comité para el manejo de la disciplina en el salón de clase. En el aspecto académico, aunque el profesor planeó el trabajo con pares para apoyar los diferentes niveles de conceptualización, considera que si hubiera propuesto previamente las parejas de trabajo, se hubiera logrado una mayor efectividad en su producción. Durante el desarrollo de la actividad el profesor generó una estrategia flexible del manejo del tiempo didáctico para el avance en el aprendizaje, de tal manera que todos los estudiantes pudieran apropiarse la estrategia propuesta y trabajar de manera autónoma en la construcción del concepto.

En términos de la estrategia, para la enseñanza de este concepto el profesor había implementado una estrategia tradicional basada en enunciar y aplicar la propiedad distributiva. Sin embargo, al comparar esta estrategia con la indagación, pudo establecer que la primera estrategia demandaba un uso muy pobre de las herramientas cognitivas de los estudiantes, puesto que se centra en la memorización de un procedimiento explicado por el profesor. En cambio, la indagación permite a los estudiantes aplicar diferentes tipos de razonamiento de manera autónoma y consciente, y crea la necesidad de identificar y aplicar la propiedad distributiva en la multiplicación de polinomios, proceso fundamentado en la analogía entre la representación geométrica con la aplicación *Algebra Tiles* y el proceso algebraico. Por otra parte, los estudiantes lograron apropiarse de la estrategia de indagación, aspecto que se

hizo evidente en el trabajo autónomo de la segunda sesión en la que los momentos de regulación fueron asumidos en general por las parejas de trabajo.

El momento de regulación fue inicialmente asumido por el profesor y se basó en la comparación entre la representación geométrica y el proceso algebraico, y la posibilidad de hacer visible la propiedad distributiva en ambos contextos. Frente a algunas preguntas de los estudiantes, el docente recurrió a una respuesta que sugería líneas perfectas en el manejo de la aplicación, que no estaba asociada al concepto. Dado que se buscaba que el uso de la herramienta tecnológica impactara tanto la disposición para la actividad como en la visualización de la propiedad distributiva dentro del modelo gráfico, el profesor sugiere que una adecuada ambientación inicial con la herramienta hubiera sido una solución pertinente.

CONCLUSIONES

En relación con los objetivos de la investigación, en primer lugar, se logró caracterizar y describir las interacciones del sistema didáctico saber-alumno-docente durante la implementación de la secuencia didáctica multiplicación de polinomios, a partir de las categorías para describir y comprender la acción didáctica (Sensevy, 2007). Así mismo, se mostraron evidencias sobre la relación entre las intenciones didácticas de la secuencia implementada por el docente y los conceptos construidos por los estudiantes. Finalmente, en la fase de confrontación, el docente reflexionó acerca de su quehacer didáctico en el aula.

En segundo lugar, la teoría de las situaciones didácticas plantea un reto en el rol del docente, puesto que sugiere un proceso de enseñanza fundamentado en el diseño de una secuencia didáctica basada en un *medio* o situación que plantee al estudiante la necesidad de determinar la estrategia pertinente para su solución;

esto permite la aplicación consciente de los diferentes tipos de razonamiento y un aprendizaje autónomo; en este tipo de actividad, el estudiante asume su propio proceso de aprendizaje y a partir de la socialización de los hallazgos, se institucionaliza el conocimiento de manera conjunta con el profesor. Es importante que durante la planeación de la secuencia se prevea el manejo conceptual de posibles errores o dificultades, de tal manera que se logren minimizar efectos como el efecto *Topaze* ilustrado en el fragmento 7 del análisis anterior. Considerar el uso adecuado de una herramienta tecnológica que aporte a la construcción del concepto para la fase de diseño, podría tener un impacto tanto en el nivel de auto-gestión del conocimiento por parte de los estudiantes, como en su disposición para el desarrollo de la actividad. Un ejercicio de planeación docente como el que sugiere la teoría de las situaciones didácticas, implicaría un mejoramiento en el ejercicio profesional del docente y en la calidad de los procesos de aprendizaje de los estudiantes.

Por otra parte, las fases de gestión, análisis y auto-confrontación que plantea la metodología de la clínica didáctica y las categorías de análisis que la fundamentan, deben ser parte del proceso de evaluación formativa del docente. Este debe incluir un análisis sistemático de su gestión en el aula, la auto-confrontación entre la planeación y la gestión para la posterior reflexión individual o entre pares, con el ánimo de identificar sus avances y aquellos aspectos susceptibles de mejoramiento en su labor docente.

En la fase de análisis, se determinó la relevancia del momento de definición por parte del docente tanto para precisar las reglas del juego del saber, como para facilitar que los estudiantes asuman la responsabilidad de su propio aprendizaje y por tanto, puedan continuar el proceso de interacción entre el estudiante, el saber y el profesor a través de los momentos de devolución y regulación. Esta simultaneidad de los momentos de devolución y regulación

permitió constatar el impacto de las acciones de los docentes y de los estudiantes en el avance en la construcción de los conceptos y en el momento de institucionalización del saber, construcción que se logra cuando el docente genera un ambiente que propicia el aprendizaje autónomo por parte del estudiante (topogénesis).

Finalmente, es importante que el docente asuma el proceso de investigación como parte fundamental de su rol de docente y como una oportunidad de crecimiento y mejoramiento continuo.

LISTA DE REFERENCIAS

- Brousseau, G. (2007). *Introducción a la Teoría de las Situaciones Didácticas. Libros del Zorzal. Buenos Aires, Argentina*. Recuperado de http://www.udesantiagoovirtual.cl/moodle2/pluginfile.php?file=%2F204043%2Fmod_resource%2Fcontent%2F2%2F287885313-Guy-Brousseau-Iniciacion-al-estudio-de-la-teoria-de-las-situaciones-didacticas-pdf.pdf.
- Castañeda, D. (2010). *Aproximación del concepto de devolución en didácticas comparadas. CiDd: II Congreso Internacional de DIDACTIQUES 2010*. Recuperado de <http://www2.udg.edu/portals/3/didactiques2010/guiaciid/ACABADES%20FINALS/443.pdf>.
- Castro, E. (2012). *Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. XVI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Recuperado de https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/XVISeiem_Castro.pdf.
- Collados, E. & Rickenmann, R. (2010). Formación docente: retos y dificultades para el alumno en interacción con el objeto artístico. *Revista Iberoamericana de Educación. Revista de la OEI* n° 51/5, 87-106.
- Dámore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. Enseñanza de la matemática. *Revista de la ASOVEMAT (Asociación Venezolana de Educación Matemática)*, vol. 17, n° 1, 87-106.
- Juanola, R. (2011). La investigación didáctica: hacia la interdisciplinariedad y la cooperación. *Education Siglo XXI*, vol. 29 no. 1, 2011, 233-262
- Merchán, C; Ramírez, J. (2015) La observación de prácticas de aula: inicios de la práctica pedagógica efectiva. (*Pensamiento*), (*palabra*) y *obra*, no. 14, 96-107.
- Modelo Pedagógico, Gimnasio Campestre (2013). Sin publicar.
- Rico, L. (1999). *Didáctica de la Matemática e Investigación*. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/510/1/RicoL00-138.PDF>
- Rickenmann, R. y Alfonso, M. (2012). Construcción y difusión del conocimiento profesional de la enseñanza Artística, dentro de las prácticas del entrenamiento avanzado en la universidad: Tensiones y prácticas de referencia en la formación profesional de profesores. (*Pensamiento*), (*palabra*) y *obra*, no. 87, 88-98.
- Rickenmann, R. (2007). Investigación y formación docente: dispositivos de formación y elementos para la construcción de una identidad profesional. *EccoS Revista Científica*, vol. 9, no. 2, 435-463.
- Rickenmann, R. (1999). *Metodologías clínicas de investigación en didácticas y formación del profesorado: un estudio de los dispositivos de formación en alternancia*. Recuperado de <http://www.unige.ch/fapse/clidi/textos/Clinica-did%20ctica-RR.pdf>.
- Saldarriaga, et al. (2012). Visibilizar la acción didáctica del docente novato en educación artística. *El artista*, no. 9, 5-24.
- Saldarriaga, et al. (2011). El otro en la relación didáctica. *El artista*. no. 8, 251-265.
- Sensevy, G. L. (2007). *Categorías para describir y comprender la acción didáctica*. Recuperado de <http://www.unige.ch/fapse/clidi/textos/acciondidactica-Sensevy-2007.pdf>
- Sensevy, G. et al. (2005). An attempt to model the teacher's actions in the mathematics class. *Educational Studies in Mathematics* vol. 59, no. 1-3, 153-181.

Anexo A

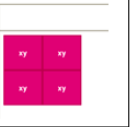
SESIÓN 1 PARTE 1																																														
CICLO DE INDAGACIÓN (IBLM)	ACCIÓN DEL DOCENTE	ACCIÓN DEL ESTUDIANTE																																												
<p>1. PREGUNTA DE INDAGACIÓN</p> <p>De la secuencia didáctica: How to multiply polynomials?</p> <p>1. INQUIRY QUESTION: How to multiply monomials?</p>	<p>Plantear la pregunta de indagación y generar una discusión sobre la necesidad de trabajar el concepto. Establecer colectivamente un primer contexto conceptual que les permita realizar conexiones entre los procesos aritméticos y los procesos algebraicos. Se pedirá a los estudiantes el área de cuadrados y de rectángulos con dimensiones numéricas para luego usar expresiones algebraicas.</p>	<p>Los estudiantes participarán en la discusión inicial.</p>																																												
<p>2. TRABAJAR CON EJEMPLOS</p> <p>2. WORKING WITH EXAMPLES</p> <p>Complete the table using the <i>Algebra Tiles</i> App to create rectangular models. Attach the model for each situation.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Base</th> <th>Height</th> <th>Area</th> <th>Rectangular Tiles Model</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>x</td> <td>=</td> <td></td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>y</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>2x</td> <td>x</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4x</td> <td>3x</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>3y</td> <td>2</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>3y</td> <td>2x</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4y</td> <td>3</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>3x</td> <td>5</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>2x</td> <td>3y</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>= $12x^2$</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> 	Base	Height	Area	Rectangular Tiles Model	x	x	=		y	y			2x	x			4x	3x			3y	2			3y	2x			4y	3			3x	5			2x	3y					= $12x^2$		<p>En la tabla se plantean ejemplos en los que se proveen expresiones para la base y la altura y se pide hallar el área mediante la comparación entre el modelo rectangular y la expresión algebraica que aparece en la aplicación.</p> <p>Brindar retroalimentación pertinente, oportuna y adecuada, de tal manera que se logre la autonomía en la construcción del procedimiento.</p>	<p>En parejas, los estudiantes resolverán los ejemplos haciendo uso de la aplicación en los iPads.</p>
Base	Height	Area	Rectangular Tiles Model																																											
x	x	=																																												
y	y																																													
2x	x																																													
4x	3x																																													
3y	2																																													
3y	2x																																													
4y	3																																													
3x	5																																													
2x	3y																																													
		= $12x^2$																																												
<p>CONEXIÓN CON CONOCIMIENTOS PREVIOS</p> <p>3. CONNECTING WITH PREVIOUS KNOWLEDGE</p> <p>Which previous mathematical concepts did you apply to fill out the table above?</p>	<p>Pedir a los estudiantes identificar los conceptos que conocen y que fueron requeridos para llenar la tabla.</p>	<p>En parejas, los estudiantes escribirán los conceptos que conocen y que fueron requeridos para llenar la tabla.</p>																																												

Tabla 1. Estrategia de indagación y acciones del docente y del estudiante. Sesión 1 Parte 1.

CICLO DE INDAGACIÓN (IBLM)	ACCIÓN DEL DOCENTE	ACCIÓN DEL ESTUDIANTE
ESTABLECER CONJETURAS 4. CONJECTURING How did you multiply each pair of monomials?	Solicitar a los estudiantes comparar en los ejemplos resueltos en la etapa 3, los monomios que corresponden a la base y la altura con el resultado de su multiplicación y que establezcan una conjetura acerca de los pasos necesarios para multiplicar monomios.	Mediante la aplicación de pensamiento inductivo, los estudiantes establecerán una conjetura acerca de los pasos necesarios para multiplicar monomios.
PROBAR LA CONJETURA 5. TESTING CONJECTURE Provide two different examples to proof the conjecture above.	Sugerir a los estudiantes poner a prueba su método algebraico, proponiendo y resolviendo dos ejemplos propios.	Los estudiantes aplicarán el pensamiento hipotético-deductivo, poner a prueba su método algebraico, proponiendo y resolviendo dos ejemplos propios.
GENERALIZACIÓN 1. GENERALIZING I. II. III.	Pedir a los estudiantes establecer el método algebraico para multiplicar monomios, justificando cada paso con los conceptos y propiedades correspondientes.	Los estudiantes escribirán cada paso del método construido por ellos, y lo justificarán mediante la aplicación de los conceptos y propiedades pertinentes.
COMPARTIR RESULTADOS 7. SHARING RESULTS How to multiply monomials?	Generar un ambiente colectivo para que las parejas de trabajo puedan compartir tanto el proceso realizado, como los resultados obtenidos. Institucionalizar conceptos de manera conjunta.	Participar en la discusión de los procesos realizados y los resultados obtenidos en cada pareja de trabajo.
EXTENDER RESULTADOS 8. EXTEND RESULTS	Propiciar el ambiente necesario para la generación de la pregunta de indagación para la parte 2 sobre la multiplicación entre un monomio y un binomio.	Participar en la discusión para continuar el trabajo de la parte 2.

Tabla 1. Estrategia de indagación y acciones del docente y del estudiante. Sesión 1 Parte 1.