

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS CON AYUDA DEL COMPUTADOR GRAFICACIÓN DE FUNCIONES

Torres W.

Profesor Departamento de Matemáticas.

RESUMEN

En el presente artículo se aborda la enseñanza de las gráficas de funciones con ayuda del computador y las diferentes transformaciones que pueden tener las mismas a partir de una función base. Principalmente, se pretende dar una opción de uso del computador en la enseñanza de las matemáticas, abordando, en este caso, un tema tan atractivo e importante como es la graficación de funciones. De igual forma, se pretende resaltar las ventajas que puedan tener el profesor y los estudiantes usando la tecnología.

ABSTRACT

This article is focuses on the teaching of functions of graphics with the help of a computer and the different transformations that these can have starting from a function base. The main purpose, is to give the option of the use of the computer in the teaching of math, focusing, in this case, in an attractive and important topic such as the function graphicing. Also, it pretends to highlight the advantages that the teacher and the students might have by using the technology.

EL PROBLEMA

La graficación de funciones es un proceso de gran utilidad en la enseñanza de las Matemáticas. Sin embargo, en ocasiones, para los estudiantes puede ser dispendioso asimilarlo. Por años se han utilizado diferentes métodos al enseñar a graficar funciones; uno de ellos es el de *reemplazar valores*. En este aspecto la calculadora ha ayudado, ya que permite agilizar las operaciones.

Si el graficar dependiera de lo antes mencionado, los estudiantes se limitarían a "mecanizar" este proceso. Entre más compleja fuese la función para graficar, más se reemplazarían valores hasta que se obtuvieran las suficientes parejas de puntos de la forma (x, y) , y así obtener una gráfica adecuada. Sin embargo, este método termina siendo tedioso, además, no es como el más indicado para desarrollar procesos en el análisis de gráficas de funciones.

Graficar funciones va más allá de reemplazar unos valores, ubicar las parejas en el plano y unir los puntos. Un estudiante que sepa identificar la forma y graficar una función va a poder, más adelante, poder interpretar mejor una situación o resolver problemas. Para ello, hay

que enseñarles a realizar buenas aproximaciones (*esbozos*) de los gráficos de las funciones; y así poder combinar el análisis de la parte algebraica y gráfica de la función.

EL COMPUTADOR COMO ALTERNATIVA

DOS MÉTODOS DISTINTOS AL MOMENTO DE ENSEÑAR A GRAFICAR

En el aula de clase se pueden trabajar las funciones analizando sus características y sus transformaciones, y con base en esto realizar los gráficos de diferentes funciones en el tablero para que ellos observen y también grafiquen en su cuaderno. Este proceso ha sido el más usado.

Otra alternativa es un retroproyector y unas gráficas en acetato. Con esta ayuda los estudiantes pueden comprender los comportamientos gráficos de diferentes funciones. En este caso un tablero con cuadrícula también ayudaría bastante. Este método puede ser más ágil que el anterior.

Se pueden combinar los dos métodos anteriores. Esto, en la mayoría de casos, permitiría obtener buenos resultados.

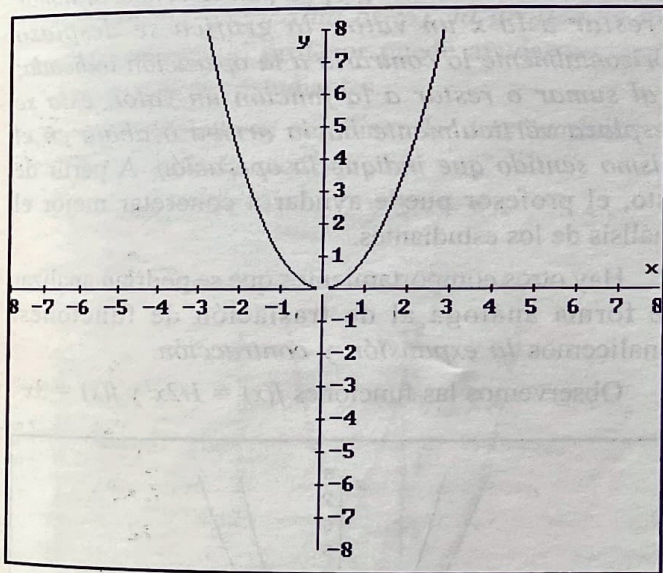
EL COMPUTADOR Y UN BUEN GRAFICADOR

La alternativa más reciente que podría mejorar o complementar el trabajo con gráficas en el aula de clase, es el computador. Como es sabido, este se ha convertido, en los últimos años, en una herramienta valiosa para el desarrollo de procesos no solo en Matemáticas, sino en otras ciencias. Para ello, basta con tener un buen programa graficador.

GRAFICANDO FUNCIONES CON AYUDA DEL COMPUTADOR

Se podrían considerar dos grandes pasos al enseñar a graficar funciones: el primero es graficar la función que vamos a llamar *base*, es decir aquella que se centra en el origen (la pareja $(0,0)$); y observar sus características. El segundo paso es analizar las diferentes transformaciones que pueda tener esta función.

Por ejemplo, tomemos la función cuadrática. Haciendo el primer paso, se grafica $f(x)=x^2$. Enseguida se analizan sus características: *su forma gráfica, en este caso es una parábola, el vértice, dominio y rango, entre otras.*



Gráfica 1. Función $f(x)=x^2$

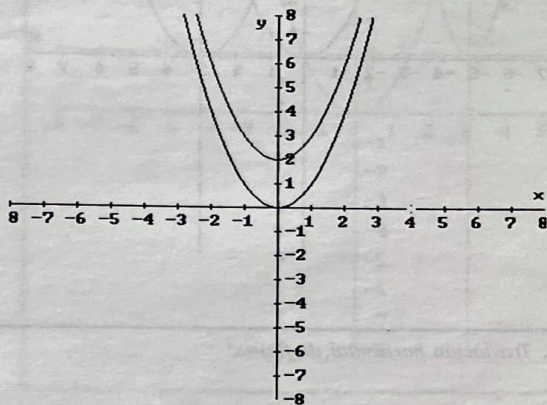
Ahora apliquemos el segundo paso analizando todas las posibles transformaciones de la función.

Inicialmente veamos las *traslaciones* de $f(x)=x^2$. Grafiquemos $f(x) = x^2+2$ (Gráfica 2).

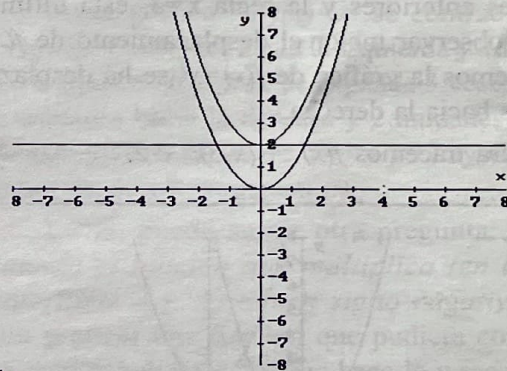
En la *gráfica 2a* se trazan las funciones $f(x)=x^2$ y $f(x) = x^2+2$; en la *gráfica 2b* se trazan las dos funciones anteriores y la recta $y=2$, esta última nos permite observar mejor el desplazamiento de $f(x)=x^2$. Como nos

podemos dar cuenta la gráfica $f(x)=x^2$ se ha desplazado 2 unidades hacia arriba.

Veamos la gráfica la función $f(x) = (x-3)^2$ (Gráfica 3)

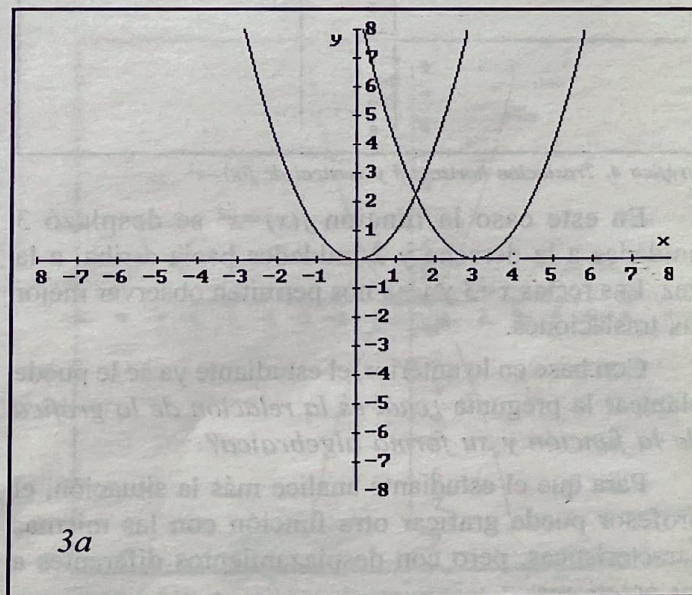


2a

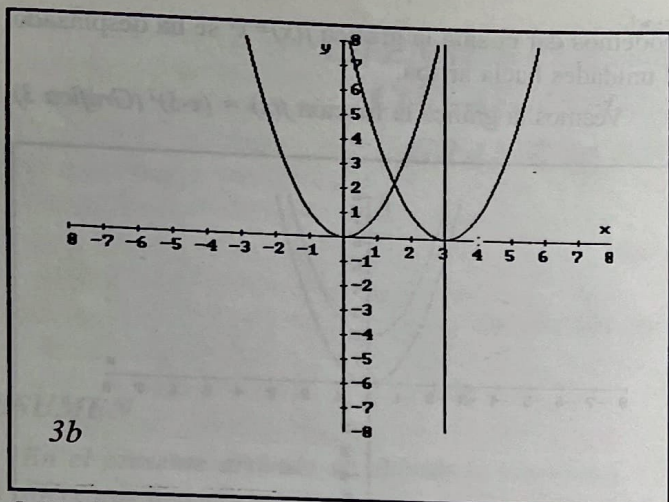


2b

Gráfica 2. Traslación vertical de $f(x)=x^2$



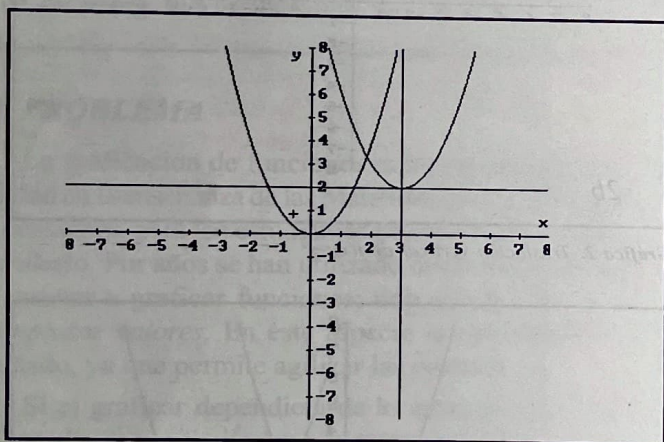
3a



Gráfica 3. Traslación horizontal de $f(x)=x^2$

En la gráfica 3a se trazan las funciones $f(x)=x^2$ y $f(x)=(x-3)^2$; en la gráfica 3b se trazan las dos funciones anteriores y la recta $x=3$, esta última nos permite observar mejor el desplazamiento de $f(x)=x^2$. Como vemos la gráfica de $f(x)=x^2$ se ha desplazado 3 unidades hacia la derecha.

Ahora tracemos $f(x)=(x-3)^2+2$.



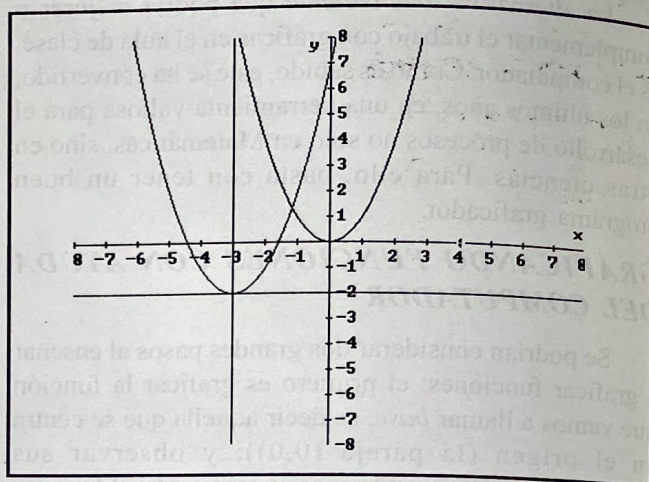
Gráfica 4. Traslación horizontal y vertical de $f(x)=x^2$

En este caso la función $f(x)=x^2$ se desplazó 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba, a la vez. Las rectas $x=3$ y $y=2$ nos permiten observar mejor las traslaciones.

Con base en lo anterior, el estudiante ya se le puede plantear la pregunta *¿cuál es la relación de la gráfica de la función y su forma algebraica?*

Para que el estudiante analice más la situación, el profesor puede graficar otra función con las mismas características, pero con desplazamientos diferentes a los anteriores.

Tomemos la función $f(x)=(x+3)^2-2$



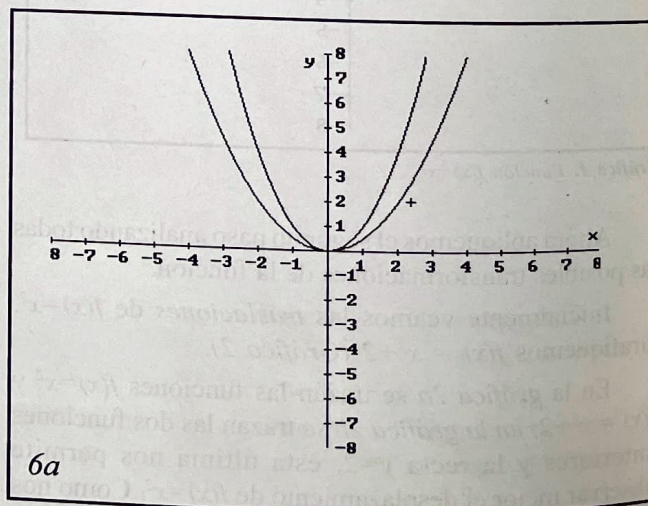
Gráfica 5. Nueva traslación horizontal y vertical de $f(x)=x^2$

En la gráfica 5, $f(x)=x^2$ se traslada 3 unidades hacia la izquierda y 2 unidades hacia abajo.

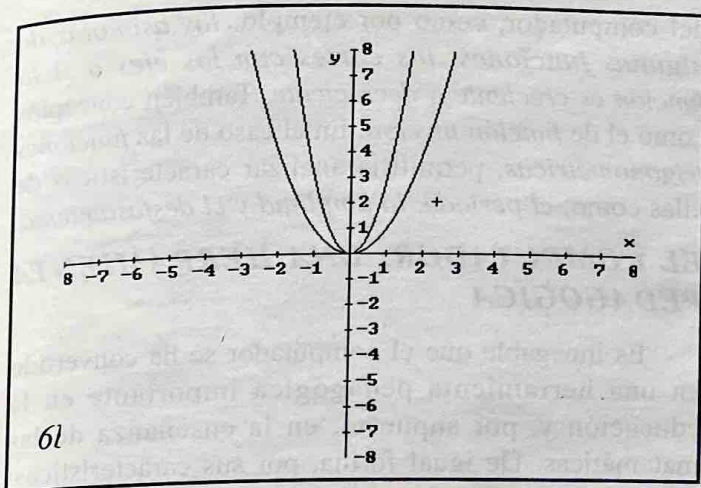
A partir de los ejemplos anteriores y, si se quiere, otros ejemplos con otras funciones, Los estudiantes podrían concluir, con sus propias palabras, que: *al sumar o restar a la x un valor, la gráfica se desplaza horizontalmente lo contrario a la operación indicada; y al sumar o restar a la función un valor, esta se desplaza verticalmente hacia arriba o abajo en el mismo sentido que indique la operación.* A partir de esto, el profesor puede ayudar a concretar mejor el análisis de los estudiantes.

Hay otros comportamientos que se podrían analizar de forma análoga al de traslación de funciones. Analicemos *la expansión y contracción.*

Observemos las funciones $f(x)=1/2x^2$ y $f(x)=3x^2$.



6a



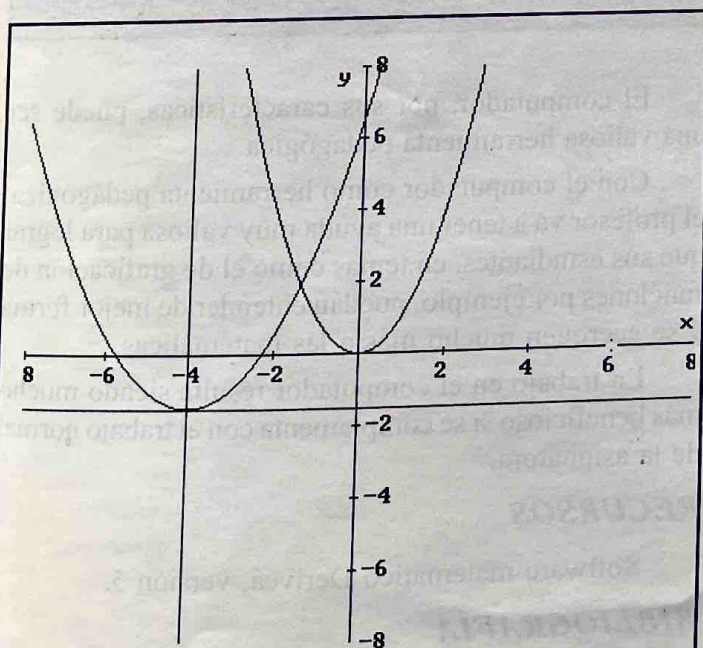
Gráfica 6. Contracción y expansión de la función $f(x)=x^2$

En la gráfica 6a $f(x) = x^2$ tiene una *contracción*, se contrae $1/2$, y en la gráfica 6b tiene una *expansión*, se expande 3 veces.

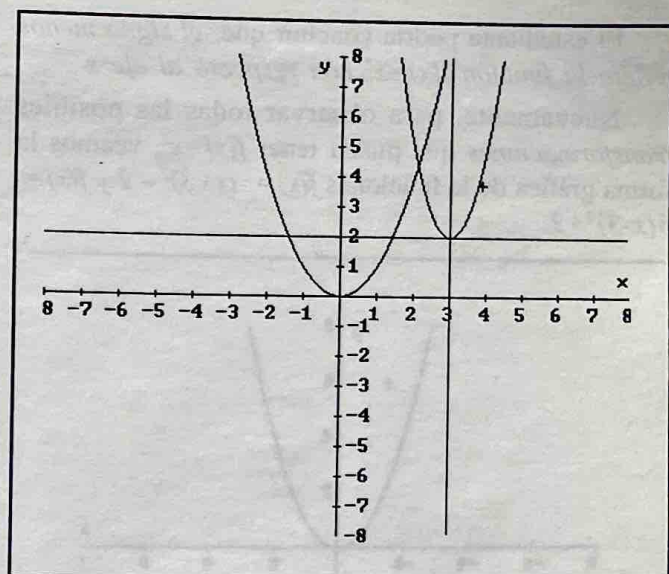
Con unos ejemplos más, el estudiante puede sacar sus propias conclusiones: cuando el número que multiplica es mayor de 1 (en la gráfica 6b es 3), la gráfica se expande; y cuando el número está entre 0 y 1 (en la gráfica 6a es $1/2$), la gráfica se contrae. Nuevamente el profesor puede ayudar a concretar el análisis de los estudiantes.

Enseguida se combinan las transformaciones antes vistas con la funciones

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+4)^2 - 3/2 \text{ y } f(x)=3(x-3)^2+2.$$



7a

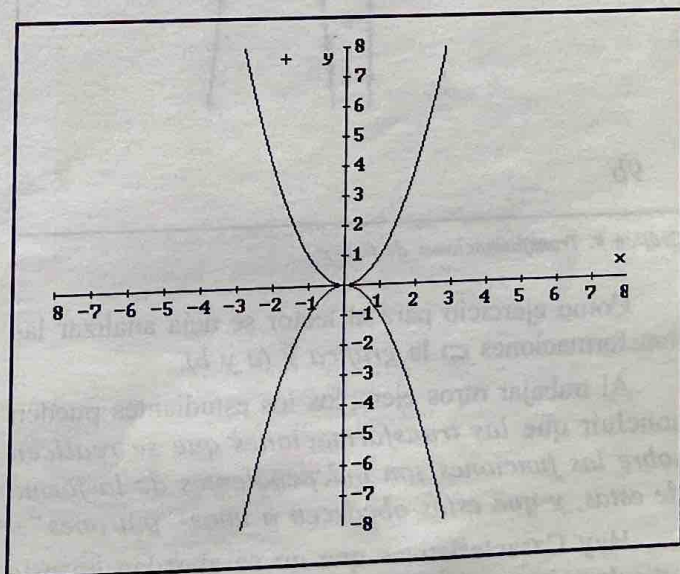


Gráfica 7. Expansión, contracción y traslaciones de $f(x)=x^2$.

En la gráfica 7a $f(x)=x^2$ se contrae $1/2$ veces, se desplaza 4 unidades hacia la izquierda y $3/2$ hacia abajo. En la gráfica 7b $f(x)=x^2$ se expande 3 veces, se desplaza 3 unidades hacia la derecha y 2 unidades hacia arriba, en esta gráfica las rectas $x=3$ y $y=2$ ayudan a analizar mejor los desplazamientos.

Luego puede surgir otra pregunta: ¿qué ocurre cuando el número que multiplica (en los ejemplos anteriores 3 y $1/2$) tienen signo negativo?. Bastaría con graficar una función que pudiera contestarla; los mismos estudiantes podrían hacerlo y sacar sus propias conclusiones.

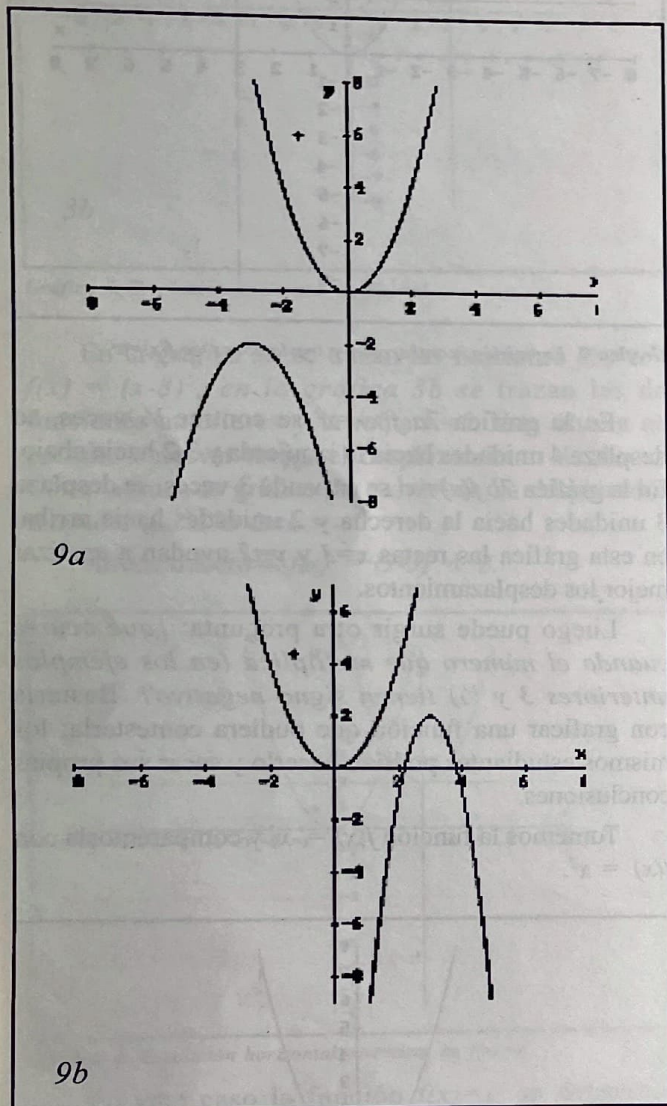
Tomemos la función $f(x) = -x^2$ y comparémosla con $f(x) = x^2$.



Gráfica 8. Reflexión de la función $f(x)=x^2$

El estudiante podría concluir que: *el signo menos refleja la función $f(x)=x^2$ con respecto al eje x .*

Nuevamente, para observar todas las posibles transformaciones que pueda tener $f(x)=x^2$, veamos la forma gráfica de la funciones $f(x) = -(x+3)^2 - 2$ y $f(x) = 3(x-3)^2 + 2$.



Gráfica 9. Transformaciones de $f(x)=x^2$

Como ejercicio para el lector se deja analizar las transformaciones en la gráfica 9 (a y b).

Al trabajar otros ejemplos los estudiantes pueden concluir que *las transformaciones que se realicen sobre las funciones son independientes de la forma de estas, y que estas obedecen a unos "patrones"*.

Hay Características que no se abordan en este artículo y que también se pueden desarrollar con ayuda

del computador, como por ejemplo: *las asíntotas de algunas funciones, los cortes con los ejes o si la función es creciente o decreciente.* También conceptos como el de *función inversa.* En el caso de las *funciones trigonométricas,* permitiría analizar características de ellas como: *el periodo, la amplitud y el desfase.*

EL COMPUTADOR: UNA HERRAMIENTA PEDAGÓGICA

Es innegable que el computador se ha convertido en una herramienta pedagógica importante en la educación y, por supuesto, en la enseñanza de las matemáticas. De igual forma, por sus características: atrae al estudiante y logra una buena concentración, le permite sacar sus propias conclusiones (así sean erradas), que después el profesor va a ayudar a afianzar o corregir, también permite una mayor y efectiva interacción profesor-estudiante.



El computador, por sus características, puede ser una valiosa herramienta pedagógica.

Con el computador como herramienta pedagógica, el profesor va a tener una ayuda muy valiosa para lograr que sus estudiantes, en temas como el de graficación de funciones por ejemplo, puedan entender de mejor forma y se acerquen mucho más a las matemáticas.

En trabajo en el computador resulta siendo mucho más beneficioso si se complementa con el trabajo normal de la asignatura.

RECURSOS

Software matemático Deriveã, versión 5.

BIBLIOGRAFÍA

- *Precálculo, Funciones y Gráficas.* Cuarta edición. 2000. R. A. Barnett, M. R. Ziegler, K. E. Byeleen, México. Páginas 170 a 177.