LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS CON AYUDA DEL COMPUTADOR GRAFICACIÓN DE FUNCIONES 2

Torres W. [1]

Profesor Departamento de Matemáticas del Gimnasio Campestre

Resumen

El presente artículo continúa con el estudio de las gráficas de las funciones, en este caso se aborda el trabajo con las funciones trigonométricas, analizando sus características principales como son: la amplitud, el periodo y los desplazamientos. Se espera seguir contribuyendo en el manejo del computador como herramienta de trabajo en la enseñanza de las matemáticas.

Summary

The following article is a continuation of the study of the functions of graphics, in this case it includes the work with the trigonometrical functions, analyzing their main characteristics like: amplitud, the period and displacement. It is expected to contribute to computer management as a working tool in mathematics teaching.

Recordando

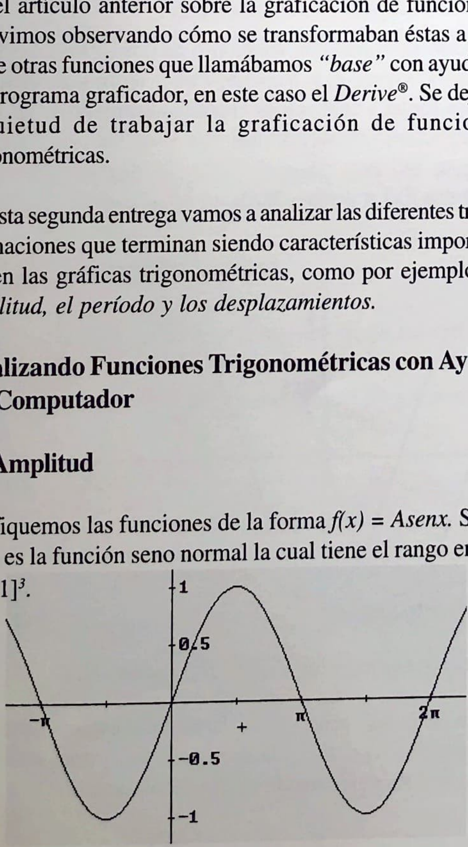
En el artículo anterior sobre la graficación de funciones[2], estuvimos observando cómo se transformaban éstas a partir de otras funciones que llamábamos *"base"* con ayuda de un programa graficador, en este caso el *Derive®*. Se dejó la inquietud de trabajar la graficación de funciones trigonométricas.

En esta segunda entrega vamos a analizar las diferentes transformaciones que terminan siendo características importantes en las gráficas trigonométricas, como por ejemplo*: la amplitud, el período y los desplazamientos.*

Analizando Funciones Trigonométricas con Ayuda del Computador

La Amplitud

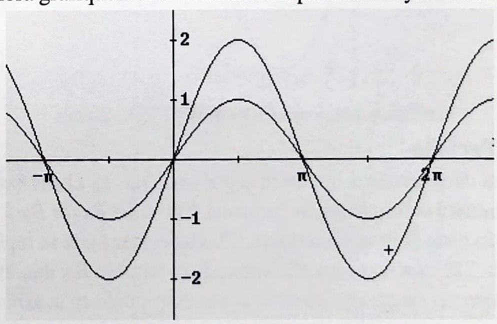
Grafiquemos las funciones de la forma $f(x) = A sen x$. Si $A=1$ es la función seno normal la cual tiene el rango entre [-1, 1][3].



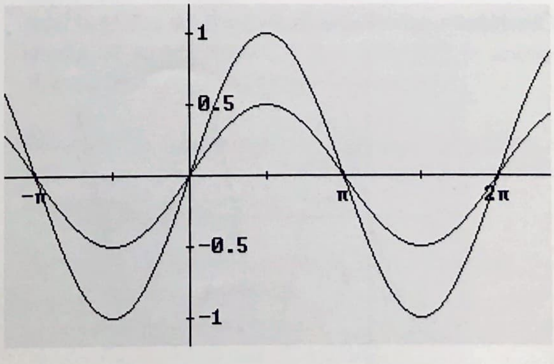
Gráfica 1: función f(x) = sen x

Esta función es la que vamos a utilizar como base para ayudar a graficar las demás, su amplitud $A=1$ y su período es 2π.

Ahora grafiquemos el seno con amplitud $A=2$ y $A=1/2$.



Gráfica 2: \funciones f(x) = senx y f(x) = 2sen x



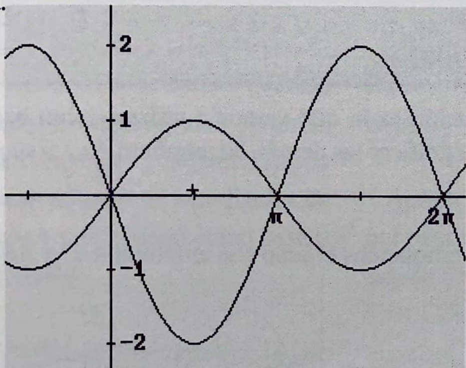
Gráfica 3: funciones f(x) = senx y f(x) = 1/2 sen x

El estudiante comienza a sacar sus propias conclusiones, pero lo más importante es que él puede ver como la variación del número *A* amplía o contrae la función verticalmente.

En esta situación me he encontrado con estudiantes que piensan o concluyen que el número *A* sólo actúa positivamente, es decir que por ejemplo si $A=2$ solo se amplía hasta 2, pero no hasta -2. Con unos ejemplos más el estudiante aclara esta confusión.

También pueden concluir que si $A>1$ la función se amplía y si $0<A<1$ la función se contrae.

Otro aspecto a tener en cuenta es cuando el número *A* es negativo, lo cual refleja la gráfica con respecto al eje x, pero esto no incide en la amplitud, ya que esta siempre es positiva.

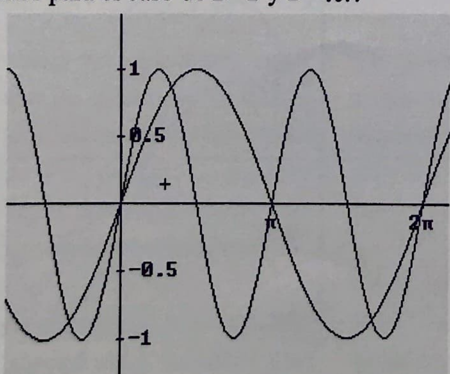


Gráfica 4: funciones f(x) = senx y f(x) = -2 sen x

El Período

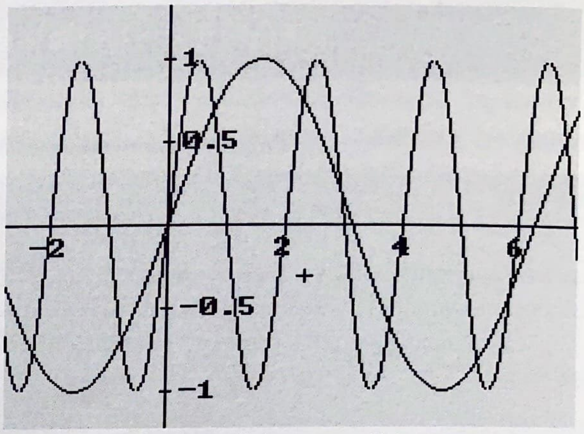
Otra característica importante por analizar, es el *período*. Veamos las funciones de la forma $f(x) = senBx$. Si $B=1$ el período de la función seno es 2π..es decir la onda se repite cada 2π..con respecto a *x*. Variando el número *B* y dándole valores, el estudiante observa como este incide en la *expansión o contracción* de la gráfica de forma horizontal, y cómo la onda cambia su repetición (período) con respecto a *x*.

Observemos para el caso de $B=2$ y $B=\pi$..



Gráfica 5: Funciones f(x) = senx y f(x) = sen 2x

Como se puede observar con $B=2$, el período pasa a ser π..



Gráfica 6: funciones f(x) = sen x y f(x) = serπ x

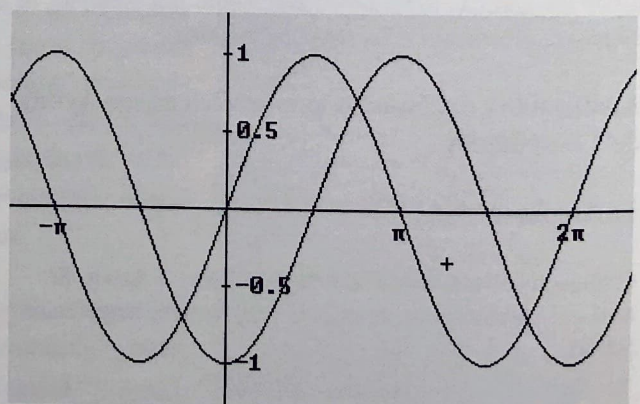
En la *gráfica 6* la onda se repite cada 2 unidades, esto se debe a que $B=\pi$.,entonces el período pasa a ser 2.

Con unos ejemplos más se concluye que el período de una función senoidal es $2\pi/B$.

El Desplazamiento de Fase o Desfasamiento[3]

Este caso es importante analizarlo de dos formas, las funciones $f(x)=sen(x-c)$ y $f(x)=sen(bx-c)$. Veamos un ejemplo de cada forma y analicemos el comportamiento de las funciones,

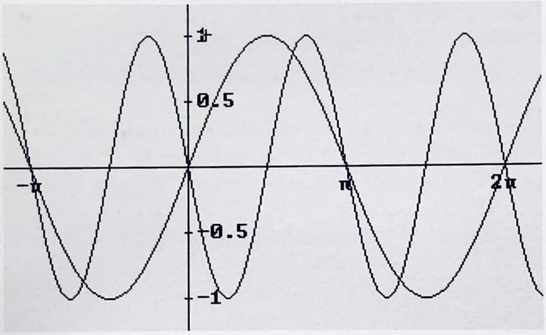
Tomemos $f(x) = sen(x - \pi/2)$



Gráfica 7: funciones f(x) = senx y f(x) = sen(x-π/2)

Como se puede observar en la gráfica, ésta se desplaza con respecto a $(x-\pi/2)$ a la derecha. Estos comportamientos ya se habían analizado en el artículo anterior[2].

Ahora grafiquemos $f(x) = sen(2x - \pi)$,



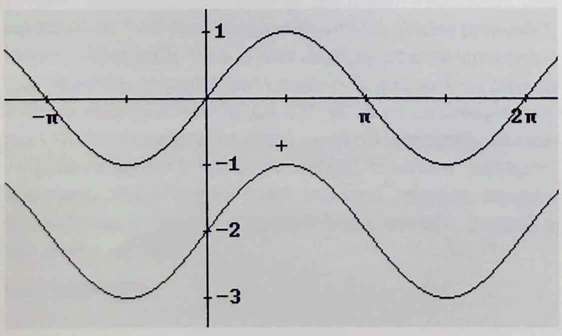
Gráfica 8: funciones f(x) = sen x y f(x) = sen(2x-π)

Aquí la función también se desplaza $\pi/2$ a la derecha, pero la diferencia está en que el periodo varía, por supuesto, si $B \neq 1$ el período cambia. Para entender un poco esta diferencia factoricemos en $2x - \pi$ el número 2, es decir quedaría $2(x - \pi/2)$, ahora si es más entendible el comportamiento de la función y el estudiante lo puede observar mejor. El periodo en la gráfica 8 es $2\pi/2 = \pi$ y la función se desplaza $\pi/2$ a la derecha. En la gráfica 7 el periodo es 2π y la función se desplaza $\pi/2$ a la derecha.

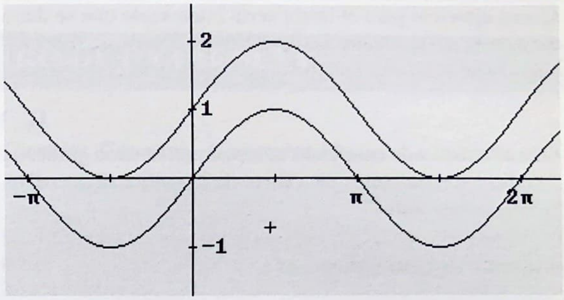
Con unos ejemplos más los estudiantes pueden terminar relacionado mejor el período con los desplazamientos de fase o desfasamientos.

El Desplazamiento Vertical

Ahora se graficarán las funciones de la forma $f(x) = senx + d$.
Veamos las gráficas de las funciones $f(x) = senx + 1$ y $f(x) = senx - 2$



Gráfica 9: funciones f(x) = sen x y f(x) = sen x -2

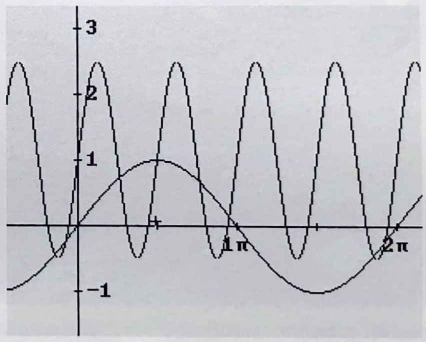


Gráfica 10: funciones f(x) = sen x y f(x) = sen x + 1

Se puede observar que la función se desplaza verticalmente de acuerdo con el número *d*, en la gráfica 9 la función seno se desplaza 2 unidades hacia abajo y en la gráfica 10 se desplaza una unidad hacia arriba.

Terminando el trabajo de analizar cada una de las transformaciones de una gráfica trigonométrica, se puede reforzar el estudio de éstas con ejercicios de las mismas características en donde combine todo y luego realizar algunas aplicaciones.

Por ejemplo grafiquemos $y = -3/2 \ sen\,(4x + \pi) + 1$



Gráfica 11: funciones f(x) = sen x y f(x) = -3/2 sen(4x +π) + 1

Aquí la gráfica del seno se refleja con respecto al eje x, se amplía *3/2*, su periodo es $2\pi/4$, es decir $\pi/2$, se desplaza $\pi/4$ a la izquierda y una unidad hacia arriba.

Otro ejercicio que enriquece más el trabajo con gráficas, es pedirle a los estudiantes que ejecuten algunas transformaciones a partir de una gráfica base.

Por ejemplo pedirles que tomen la función sen x y:

- Ampliarla 3 unidades
- Cambiar su período a π
- Desplazar su fase π unidades y
- Desplazarla 2 unidades hacia arriba.

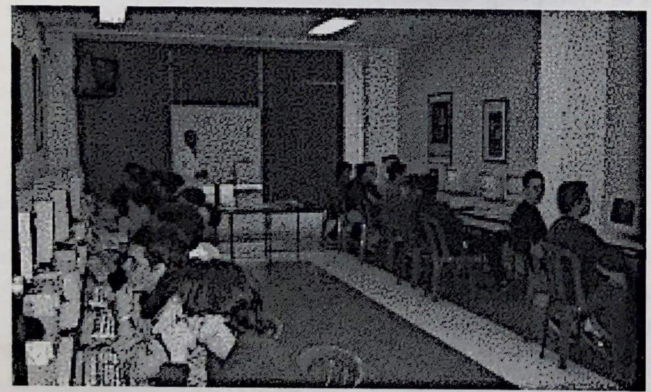
Como ejercicio para el lector sería interesante que se diera a la tarea de realizar estas transformaciones y decir cuál sería la ecuación de la función, además graficarla.

Otra alternativa de enseñanza es tomar una función graficada y pedirle al estudiante que a partir de la gráfica diga cuál es la ecuación.

Algunas Conclusiones

La experiencia en el aula permite concluir que los estudiantes hacen y entienden mejor las transformaciones de las funciones a partir de las funciones trigonométricas seno y coseno. Inclusive, el trabajo previo se puede realizar en el aula de clase y luego utilizar el computador para verificar y comprobar todo lo aprendido.

Es un poco más dispendioso analizar estos comportamientos en las otras funciones trigonométricas, pero si se realiza un buen trabajo con el seno y el coseno, se pueden tener buenos resultados con las otras funciones



El computador es una herramienta valiosa al momento de comprobar resultados obtenidos en clase.

Este trabajo permite que el estudiante analice diferentes situaciones y aplicaciones como: las ondas de radio, rayos X, rayos gamma, luz visible, radiación infrarroja, radiación ultravioleta, ondas sísmicas, ondas del océano, circuitos eléctricos, generadores eléctricos, vibraciones, construcciones de puentes, sistema masa-resorte, ondas de arco de embarcaciones, estampidos sónicos, entre otros. El fenómeno que se puede describir por las ecuaciones de la forma: $y = A\,sen(Bx + c) + d$ y $y = A\cos(Bx + c) + d$, donde x representa el tiempo, es conocido en física como *movimiento armónico simple*, y ciertos tipos de análisis que implican estas ecuaciones se llaman *análisis armónicos,* también se les llama *senoidales*.

Citas

[1] *Para correspondencia wilentosa@hotmail.com*

[2] *La enseñanza de las matemáticas con ayuda del computador, graficación de funciones, Torres W. El Astrolabio volumen 2 No 2, Julio Diciembre, 2002.pag. 70 a 82*

[3] *Como dicen los estudiantes el rango se mide en y.*

[4] *Este se realiza con respecto al eje x.*

Recursos

Software matemático Derive®, versión 5.

Bibliografía

- Precálculo, Funciones y Gráficas, cuarta edición. 2000. R.A. Barnett, M.R. Ziegler; K. E. Byeleen, México. Páginas 403 a 414.
- Álgebra y trigonometría con geometría analítica, décima edición. 2002. E. W. Swokowski; J. A. Cole, México. Páginas 448 a 458.
- La enseñanza de las Matemáticas con ayuda del computador, graficación de funciones, Torres W. El Astrolabio volumen 2 No 2, Julio – Diciem bre, 2002. Páginas 78 a 82.